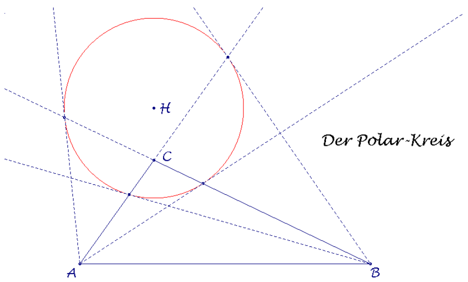
Rund um den Polar-Kreis

Eckart Schmidt

Der „polar circle" eines stumpfwinkligen Dreiecks ist der Kreis, zu dem das Dreieck selbstpolar ist, d.h. jede Ecke ist Pol der Gegenseite. Dieser Polar-Kreis ist Gegenstand der Ausarbeitung. Bekannte Eigenschaften werden aufgegriffen, spezielle Sehnenvierecke untersucht und Strophoiden sowie Zirkularkurven im Umfeld aufgezeigt. – Gearbeitet wird mit baryzentrischen Koordinaten.



Der Polar-Kreis

Der Kreis, zu dem ein Dreieck *ABC* selbstpolar ist, existiert real nur für stumpfwinklige Dreiecke. Als Bezugsdreieck für baryzentrische Koordinaten sei *ABC* z.B. bei *C* stumpfwinklig. Die Seite *AB* sei als Basis, die Seiten *AC* und *BC* seien als Schenkel des Bezugsdreiecks angesprochen. Bezeichnet man die Seitenlängen mit *a, b, c*, dann sind von den Conway-Größen

$$S_A = \frac{1}{2}(-a^2+b^2+c^2), \quad S_B = \frac{1}{2}(a^2-b^2+c^2), \quad S_C = \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) \ ,$$

die hier bevorzugt benutzt werden, S_A und S_B positiv und S_C negativ.

Der Polar-Kreis teilt die Schenkel harmonisch in den Punkten

$$(0:\sqrt{-S_C}:\pm\sqrt{S_B}) \quad \mathit{und} \quad (\sqrt{-S_C}:0:\pm\sqrt{S_A})$$

und erhält damit die einfache Gleichung

$$S_A x^2 + S_B y^2 + S_C z^2 = 0 \ .$$

Der Mittelpunkt liegt im Höhenschnitt

$$H(S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B)$$

und das Quadrat des Radius ist [Joh:176]

$$r^2 = S_A + S_B + S_C - 4R^2 \quad (R \text{ Umkreisradius}).$$

Die Spiegelung am Polar-Kreis

$$X(x:y:z) \to X'(S_B S_C(-S_A x(y+z) + S_B y^2 + S_C z^2):$$
$$S_C S_A(S_A x^2 - S_B y(z+x) + S_C z^2) : S_A S_B(S_A x^2 + S_B y^2 - S_C z(x+y)))$$

bildet die Ecken *A, B, C* in die zugehörigen Höhenfußpunkte

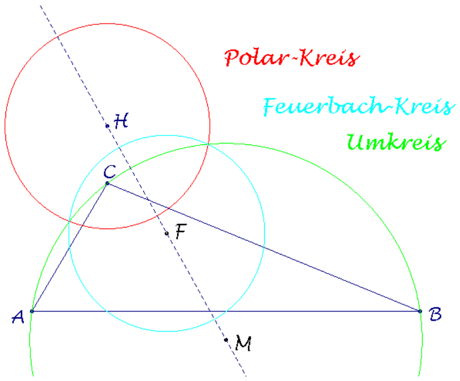
$$H_a(0:S_C:S_B), \quad H_b(S_C:0:S_A), \quad H_c(S_B:S_A:0)$$

ab und die Seitengeraden in die Thaleskreise über der Gegenecke und dem Höhenschnitt.
Thales-Kreise über den Seiten schneiden den Polar-Kreis orthogonal und werden durch die Inversion auf sich abgebildet.
Das Bild des Umkreises mit der Gleichung

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$$

ist der Feuerbach-Kreis mit der Gleichung

$$S_Ax^2 + S_By^2 + S_Cz^2 - a^2yz - b^2zx - c^2xy = 0\ .$$



Sehnenvierecke

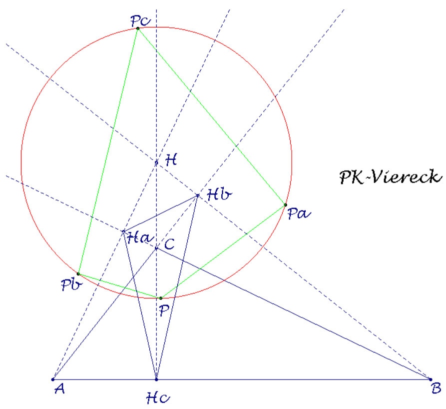
Betrachtet man einen Punkt $P(u:v:w)$ auf dem Polar-Kreis innerhalb des Dreiecks, so liegen die Ecken des zugehörigen Anti-Ceva-Dreiecks

$$P_a(-u:v:w),\quad P_b(u:-v:w),\quad P_c(u:v:-w)$$

ebenfalls auf dem Polar-Kreis, wie man unmittelbar seiner Gleichung $S_Au^2 + S_Bv^2 + S_Cw^2 = 0$ entnimmt, die in den folgenden Berechnungen immer zu berücksichtigen ist.

> **Satz 1:** **Der Polar-Kreis enthält mit einem Punkt auch die Ecken des zugehörigen Anti-Ceva-Dreiecks.**

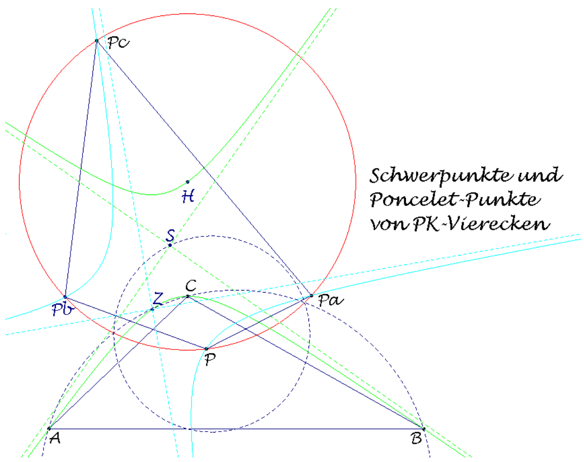
Das Viereck $PP_aP_cP_b$ ist ein konvexes Sehnenviereck, das als Polar-Kreis-Viereck, kurz *PK*-Viereck angesprochen sei.



Das Diagonaldreieck eines *PK*-Vierecks ist das Bezugsdreieck, bestehend aus dem Diagonalenschnitt *C* und den Gegenseitenschnitten *A* und *B*.
Das Höhenfußpunktdreieck $H_aH_bH_c$ erweist sich als Steiner-Dreieck der Punkte P, P_a, P_b, P_c. Das Steiner-Dreieck zu vier Punkten besteht aus den Miquel-Punkten der drei möglichen vollständigen Vierseite, wobei der Miquel-Punkt der gemeinsame Punkt der vier Umkreise der möglichen Teildreiseite ist. Den Miquel-Punkt eines Sehnenvierecks erhält man durch Spiegelung des Diagonalenschnitts am Umkreis. So ist der Miquel-Punkt des *PK*-Vierecks $PP_aP_cP_b$ der Höhenfußpunkt H_c als Spiegelung des Diagonalenschnitts *C* am Polar-Kreis.

Satz 2: Das Bezugsdreieck ist gemeinsames Diagonaldreieck und das Höhenfußpunktdreieck ist gemeinsames Steiner-Dreieck der *PK*-Vierecke.

Es liegt nahe, Ortslinien von „merkwürdigen“ Punkten der PK-Vierecke zu untersuchen.



So liegen z.B. die Schwerpunkte

$$S(u^2(-u^2+v^2+w^2):v^2(u^2-v^2+w^2):w^2(u^2+v^2-w^2))$$

der *PK*-Vierecke auf dem Umkreis des Steiner-Dreiecks, d.h. auf dem Feuerbach-Kreis des Bezugsdreiecks. Auf dem Feuerbach-Kreis liegen andererseits die Zentren gleichseitiger Umhyperbeln des Bezugsdreiecks. Betrachtet man nun die zum Schwerpunkt *S* des *PK*-Vierecks gehörige gleichseitige Umhyperbel des Bezugsdreiecks, so erweist sie sich als Mittenkegelschnitt des *PK*-Vierecks mit der Gleichung

$$u^2yz+v^2zx+w^2xy=0\ .$$

Auf dem Mittenkegelschnitt liegt auch der Poncelet-Punkt *Z* des *PK*-Vierecks, d.h. das Zentrum der gleichseitigen Umhyperbel:

$$Z(\frac{1}{b^2w^2-c^2v^2}:\frac{1}{c^2u^2-a^2w^2}:\frac{1}{a^2v^2-b^2u^2})\ .$$

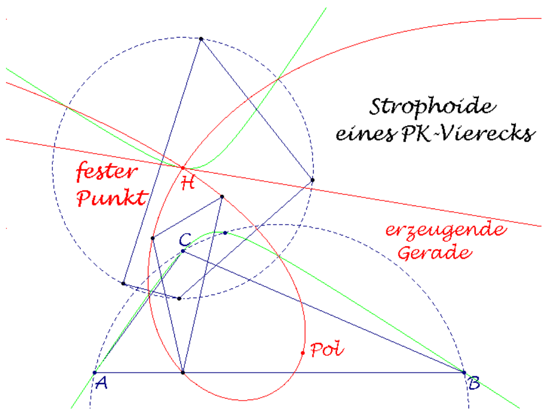
Satz 3: Die Schwerpunkte der *PK*-Vierecke liegen auf dem Feuerbach-Kreis, die Poncelet-Punkte auf dem Umkreis des Bezugsdreiecks.

Der Poncelet-Punkt eines Vierecks liegt immer auf dem Umkreis des Diagonaldreiecks; für Sehnenvierecke ergibt er sich durch Spiegelung der Umkreismitte am Schwerpunkt. Damit liegt der Poncelet-Punkt eines *PK*-Vierecks im nicht-trivialen Schnitt des Umkreises des Bezugsdreiecks und des Mittenkegelschnitts des *PK*-Vierecks.

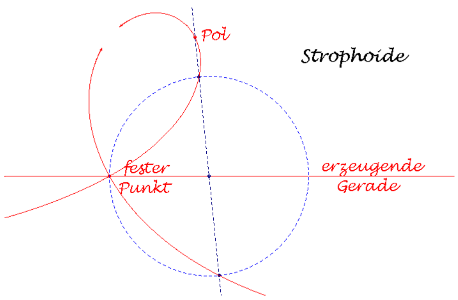
Strophoiden

Strophoiden sind u.a. inverse Bilder von gleichseitigen Hyperbeln, sofern die Mitte des Inversionskreises auf der Hyperbel liegt [Sch:07.3]. Nun ist der Mittenkegelschnitt eines *PK*-Vierecks eine gleichseitige Hyperbel durch den Mittelpunkt des Polar-Kreises. Die Inversion am Polar-Kreis ergibt damit eine Strophoide mit der Gleichung

$$\begin{aligned} S_A^3u^2x^3+S_B^3v^2y^3+S_C^3w^2z^3+S_Au^2(S_BS_Cxyz-S_AS_Bx^2y-S_AS_Cx^2z)& \\ +S_Bv^2(S_AS_Cxyz-S_AS_Bxy^2-S_BS_Cy^2z)& \\ +S_Cw^2(S_AS_Bxyz-S_AS_Cxz^2-S_BS_Cyz^2)=0& \ . \end{aligned}$$



Satz 4: Spiegelt man den Mittenkegelschnitt eines *PK*-Vierecks am Polar-Kreis, so erhält man eine Strophoide durch die Ecken des Steiner-Dreiecks. Erzeugende Gerade ist die Tangente in der Polar-Kreis-Mitte an den Mittenkegelschnitt, fester Punkt ist der Berührpunkt und Pol ist die Spiegelung des Poncelet-Punktes des *PK*-Vierecks am Polar-Kreis.



Allgemein ist die Strophoide einer Kurve festgelegt durch einen festen Punkt und einen Pol: Kreise um Punkte der Kurve durch den festen Punkt schneiden die Verbindungsgerade des Kurvenpunktes mit dem Pol in Punkten der Strophoide [Loc:135]. In Satz 4 handelt es sich um Strophoiden von Geraden, auf denen auch der feste Punkt liegt. Genauer: die erzeugende Gerade ist Tangente im Mittelpunkt des Polar-Kreises an den Mittenkegelschnitts des *PK*-Vierecks; sie hat die Gleichung

$$S_A^2u^2x+S_B^2v^2y+S_C^2w^2z=0\ .$$

Fester Punkt ist der Berührpunkt im Mittelpunkt *H* des Polar-Kreises. Den Pol der Strophoide erhält man durch Spiegelung des Poncelet-Punktes *Z* des *PK*-Vierecks am Polar-Kreis:

$$\begin{aligned}&(S_BS_C(S_B^2v^2-S_C^2w^2)(c^2v^2-b^2w^2)\\ &\qquad :S_AS_C(S_A^2u^2-S_C^2w^2)(c^2u^2-a^2w^2)\\ &\qquad\qquad :S_AS_B(S_A^2u^2-S_B^2v^2)(b^2u^2-a^2v^2))\ .\end{aligned}$$

Da der Mittenkegelschnitt die Ecken des Bezugsdreiecks enthält, sind die Ecken des Steiner-Dreiecks Punkte der Strophoide. Der Mittenkegelschnitt ist symmetrisch zu seinen orthogonalen Achsen; nach Inversion am Polar-Kreis ergeben sich zwei orthogonale Kreise für Inversionen, bei denen die Strophoide auf sich abgebildet wird (anallagmatische Kurve).

Zirkularkurven

Einem *PK*-Viereck $PP_aP_bP_c$ lässt sich wie folgt eine „pivotal circular isocubic" [Gib:32] kurz Zirkularkurve zuordnen: Als „isocubic" sei die Kurve invariant unter der „isoconjugation" [Gib:3] mit der Zuordnung

$$X(x:y:z)\to X^*(u^2yz:v^2zx:w^2xy)\ .$$

Diese Abbildung hat die Fixpunkte P, P_a, P_b, P_c und bildet die Ferngerade auf den Mittenkegelschnitt des *PK*-Vierecks ab. Oft wird eine „isoconjugation" durch das Bild des Schwerpunkts, ihren Pol $(u^2:v^2:w^2)$, gekennzeichnet. Dieser Pol liegt im Schnitt der Tripolaren des Höhenschnitts *H* mit der Gleichung

$$S_Ax+S_By+S_Cz=0$$

und der Tripolaren des Zentrums *Z* der gleichseitigen Umhyperbel des PK-Vierecks mit der Gleichung

$$(b^2w^2-c^2v^2)x+(c^2u^2-a^2w^2)y+(a^2v^2-b^2u^2)z=0\ .$$

Als „pivotal" wird eine „isocubic" angesprochen, wenn die Sehnen *XX** von Kurvenpunkten einen gemeinsamen Kurvenpunkt als Pivot-Punkt haben. Dieser Pivot-Punkt sei für alle *PK*-Vierecke die Polar-Kreis-Mitte *H*.

Satz 5: Eine „isocubic", deren Pol im Schnitt der Tripolaren von Polar-Kreis-Mitte und Zentrum der gleichseitigen Umhyperbel eines PK-Vierecks

liegt und deren Pivot-Punkt in die Polar-Kreis-Mitte fällt, ist eine Zirkularkurve.

Unter den Voraussetzungen von Satz 5 erhält die „pivotal isocubic“ zu einem *PK*-Viereck die Gleichung [Gib:7].

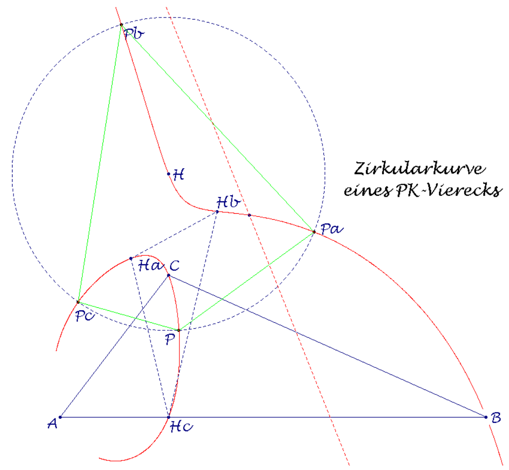
$$S_A S_B (v^2x^2 - u^2y^2)z + S_B S_C (w^2y^2 - v^2z^2)x + S_C S_A (u^2z^2 - w^2x^2)y = 0 \ .$$

Um die Kurve als Zirkularkurve auszuweisen, bestätigt man unmittelbar, dass sie die beiden absoluten Kreispunkte z.B. in der Darstellung

$$K_{1,2}(S_B + S_C : -S_C \pm iS : -S_B \mp iS) \quad mit \quad S^2 = S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A$$

als nicht-reelle Fernpunkte enthält.

Diese Zirkularkurve eines *PK*-Vierecks enthält also nicht nur die Ecken des *PK*-Vierecks, sondern auch die Ecken des Diagonaldreiecks und des Steiner-Dreiecks sowie die Polar-Kreis-Mitte.



Die Zirkularkurve eines *PK*-Vierecks lässt sich auch aus der Sicht des Steiner-Dreiecks beschreiben: Dann ist die Zirkularkurve bzgl. des Steiner-Dreiecks isogonal invariant mit der Zuordnung

$$(x:y:z) \to ((-S_A x + S_B y + S_C z)x : (S_A x - S_B y + S_C z)y : (S_A x + S_B y - S_C z)z) .$$

Der Pivot-Punkt liegt im Fernpunkt der Asymptoten

$$H^*(S_A u^2 : S_B v^2 : S_C w^2) \ ,$$

und das isogonale Bild dieses Fernpunktes ist der sogenannte Hauptpunkt

$$(S_A u^2(-S_A u^2 + S_B v^2 + S_C w^2) : S_B v^2(S_A u^2 - S_B v^2 + S_C w^2) : S_C w^2(S_A u^2 + S_B v^2 - S_C w^2))$$

im Schnitt der Zirkularkurve mit ihrer Asymptoten, gleichzeitig Punkt des Umkreises des Steiner-Dreiecks.

Vier Kurvenpunkte werden als korrespondierend angesprochen, wenn sie einen gemeinsamen Tangentialpunkt auf der Kurve haben. Korrespondierende Punkte der Zirkularkurve eines *PK*-Vierecks sind die Ecken des *PK*-Vierecks mit dem Tangentialpunkt in der Mitte des Polar-Kreises, weiterhin die Ecken des Steiner-Dreiecks und der Fernpunkt der Asymptoten mit dem Tangentialpunkt im Hauptpunkt sowie die Ecken des Bezugsdreiecks und der Höhenschnitt mit dem Tangentialpunkt im Fernpunkt der Asymptoten.

Mit den erarbeiteten Berechnungsgrundlagen ergibt sich darüber hinaus der folgende Satz:

Satz 6. Die Zirkularkurve eines *PK*-Vierecks ist invariant unter der Inversion am Polar-Kreis.

Hintergrund dieses Satzes sind drei Inversionen, unter denen eine Zirkularkurve invariant bleibt: Die Ankreismitten des Steiner-Dreiecks sind Mittelpunkte dieser Inversionen, die die Gegenecke mit der Inkreismitte des Steiner-Dreiecks vertauschen. Für ein PK-Viereck ist die Polar-Kreis-Mitte H Ankreismitte des Steiner-Dreiecks $H_aH_bH_c$ und die Spiegelung am Polar-Kreis vertauscht die Gegenecke H_c mit der Inkreismitte C des Steiner-Dreiecks.

Punktrechnung auf der Zirkularkurve

Auf der Zirkularkurve eines PK-Vierecks wurden ein gutes Dutzend Punkte angesprochen, deren Geometrie hier abschließend in einer Punktrechnung zusammengefasst wird.
Auf einer „isocubic" zu einer „isoconjugation" * mit dem Pivot-Punkt H lässt sich eine kommutative Punktrechnung mit Gruppeneigenschaften erklären. Damit lassen sich geometrische Eigenschaften von Punktkonstellationen auf der Zirkularkurve einfach beschreiben und begründen. Die Grundzüge seien in den folgenden Punkten zusammengefasst [Lan].

(1) $X+Y =_{def} res(X,Y)^* \quad \Leftrightarrow \quad res(X,Y) = (X+Y)^*$

Dabei bezeichne *res(X,Y)* den dritten Schnitt der Geraden *XY* mit der Kurve, auch als Residuum von *X* und *Y* angesprochen. Null-Element sei der Pivot-Punkt *H.* Dann ist

(2) $-X = res(X,H^*)$

das additiv Inverse eines Punktes *X*.

(3) $X,Y,Z \quad kollinear \quad \Leftrightarrow \quad X+Y+Z = H^*$

(4) $X,X^* \quad konjugiert \quad \Leftrightarrow \quad X+X^* = H^*$

(5) $T_X \quad Tangentialpunkt\ von\ X \quad \Leftrightarrow \quad T_X = H^* - 2X$

(6) $X,Y \quad korrespondierend \quad \Leftrightarrow \quad T_X = T_Y \quad \Leftrightarrow \quad 2X = 2Y$

(7) *Sechs Punkte liegen genau dann auf einem Kegelschnitt, wenn ihre Summe 2H* ergibt.*

Diese Punktrechnung sei jetzt auf die Zirkularkurve eines *PK*-Vierecks angewandt: Dann ist das Bild *H** des Pivot-Punktes *H* der Fernpunkt der Asymptoten (s.o.). Das additiv Inverse eines Punktes *X* erweist sich als isogonales Bild bzgl. des Steiner-Dreiecks:

$$-X = iso(X) \ .$$

Das $H_aH_bH_c$-isogonale Bild des Fernpunktes der Asymptote ergibt dann den Hauptpunkt $-H^*$ der Zirkularkurve. Die Ecken P, P_a, P_b, P_c des *PK*-Vierecks können als vier konzyklische, korrespondierende Punkte mit dem Tangentialpunkt H

angesprochen werden. Als vier konzyklische Punkte liegen sie mit den beiden absoluten Kreispunkten K_1 und K_2 auf einem „Kegelschnitt“, so dass ihre Summe $2H^*$ beträgt. Da K_1 und K_2 $H_aH_bH_c$-isogonal sind, ist ihre Summe Null, d.h.

$$P_a + P_b + P_c + P = 2H^* \ .$$

Als korrespondierende Punkte mit Tangentialpunkt H gilt weiterhin

$$2P_a = 2P_b = 2P_c = 2P = H^* .$$

Mit diesen beiden zusätzlichen Bedingungen lassen sich alle weiteren geometrischen Zusammenhänge berechnen.
So ergeben sich die Ecken des Diagonaldreiecks ABC zu

$$A = res(P, P_a) = (P + P_a)^* = H^* - P - P_a \ ,$$

und entsprechend $B = H^* - P - P_b, \quad C = H^* - P - P_c$.

Der gemeinsame Tangentialpunkt

$$T_A = T_B = T_C = H^*$$

ist der Fernpunkt der Asymptoten. Der vierte korrespondierende Punkt mit gleichem Tangentialpunkt ist H.
Der Umkreis des Diagonaldreiecks ABC schneidet die Zirkularkurve in einem weiteren Punkt D mit

$$A + B + C + D = 2H^* \quad \Rightarrow \quad D = 2H^* \ .$$

Dieser Punkt ist die Spiegelung des Hauptpunktes $-H^*$ am Polar-Kreis:

$$res(H, -H^*) = (-H^*)^* = 2H^* \ .$$

Für die Ecken des Steiner-Dreiecks $H_aH_bH_c$ erhält man

$$H_a = res(H, A) = A^* = H^* - A = P + P_a \ ,$$

und entsprechend $H_b = P + P_b, \quad H_c = P + P_c$.

Als gemeinsamer Tangentialpunkt ergibt sich der Hauptpunkt:

$$T_{Ha} = T_{Hb} = T_{Hc} = H^* - 4P = -H^* \ ;$$

damit ist der Fernpunkt H^* der Asymptote der vierte korrespondierende Punkt.
Um die Möglichkeiten dieser Punktrechnung zu unterstreichen, seien abschließend noch zwei zusätzliche Ergebnisse errechnet.
Schneidet ein Umkegelschnitt des PK-Vierecks die zugehörige Zirkularkurve in zwei weiteren Punkten X und Y, so sind diese $H_aH_bH_c$-isogonal, denn

$$P + P_a + P_b + P_c + X + Y = 2H^* \quad \Rightarrow \quad X = -Y \quad \Rightarrow \quad Y = iso(X) \ .$$

Die Verbindungsgerade XY ist daher eine Parallele zur Asymptote. Ein Umkegelschnitt des PK-Vierecks durch die Umkreismitte H berührt die Zirkularkurve in H.

Literatur

[Gib] B. Gibert: Cubics in the Triangle Plane. http://perso.wanadoo.fr./bernard.gibert/.

[Joh] R. A. Johnson: Advanced Euclidean Geometry. – 1929, Dover reprint 1960.

[Lan] Fred Lang: Geometry and Group Structures of some Cubics. – Forum Geometricorum, Volume 2 (2002), 135-146.
[Loc] E. H. Lockwood: A Book of Curves. – Cambridge 1961.
[Sch] E. Schmidt: Strophoiden. – http://eckartschmidt.de.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de